Câu 1:

Đồ thị thứ nhất không có chu trình Euler vì đỉnh 8 có bậc lẻ

Đồ thị thứ hai không có chu trình Euler vì đỉnh 0 có bậc lẻ

Đồ thị thứ ba có chu trình Euler vì tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn

Đồ thị thứ tư không có chu trình Euler vì đỉnh 5 có bậc lẻ

Đồ thị thứ nhất không có chu trình Hamilton vì không có đường đi Hamilton

Đồ thị thứ hai không có chu trình Hamilton vì không có đường đi Hamilton

Đồ thị thứ ba có chu trình Hamilton là chu trình 0-1-2-3-6-7-8-4-5-9-2-1-5-8-4-7-9-3-6-0

Đồ thị thứ tư không có chu trình Hamilton vì không có đường đi Hamilton

Câu 4:

Giả sử đồ thị G có chu trình độ dài lẻ. Ta sẽ chứng minh rằng G không phải là đồ thị hai mầu.

Vì G có chu trình độ dài lẻ, ta có thể tô màu các đỉnh của chu trình này sao cho hai đỉnh kề nhau có màu khác nhau.

Giả sử đỉnh đầu tiên của chu trình được tô màu 1. Khi đó, đỉnh tiếp theo trên chu trình phải được tô màu 2, đỉnh tiếp theo phải được tô màu 1, và cứ tiếp tục như vậy. Tuy nhiên, đỉnh cuối cùng trên chu trình phải được tô màu 1 để đảm bảo rằng hai đỉnh cuối cùng trên chu trình có màu khác nhau. Điều này dẫn đến một mâu thuẫn, vì đỉnh cuối cùng trên chu trình được tô màu 1 và 2 đồng thời. Do đó, giả sử ban đầu của chúng ta là sai, và một đồ thị có chu trình độ dài lẻ không thể là đồ thị hai mầu.

Ngược lại, nếu một đồ thị không chứa chu trình độ dài lẻ, ta có thể tô màu các đỉnh của đồ thị này sao cho không có hai đỉnh kề nhau có màu giống nhau. Để làm điều này, ta có thể bắt đầu bằng cách tô một đỉnh bất kỳ bằng màu 1, sau đó tô tất cả các đỉnh kề với đỉnh này bằng màu 2, tất cả các đỉnh kề với các đỉnh màu 2 bằng màu 1, và cứ tiếp tục như vậy. Vì đồ thị không chứa chu trình độ dài lẻ, ta có thể tô màu các đỉnh như vậy mà không gặp phải một mâu thuẫn nào. Do đó, một đồ thị không chứa chu trình độ dài lẻ là một đồ thị hai mầu.

Câu 5:

Một đồ thị được gọi là đồ thị biconnected nếu mỗi cặp đỉnh đều được nối với nhau bởi hai đường đi không giao nhau. Trong đồ thị liên thông, điểm articulation là đỉnh mà khi xóa nó và các cạnh kề sẽ làm đồ thị mất tính liên thông.

Để chứng minh rằng một đồ thị bất kì mà không có điểm articulation là đồ thị biconnected, ta sẽ sử dụng phản chứng. Giả sử rằng đồ thị G không phải là đồ thị biconnected. Khi đó, tồn tại ít nhất một cặp đỉnh s và t trong G mà không có đường đi nào nối chúng.

Giả sử rằng đường đi ngắn nhất giữa s và t trong G có đỉnh articulation là v. Khi đó, việc xóa đỉnh v và các cạnh kề sẽ làm cho đồ thị G mất tính liên thông. Tuy nhiên, theo giả thiết, G không có điểm articulation, do đó không có đỉnh nào trên đường đi ngắn nhất giữa s và t là điểm articulation.

Do đó, ta có thể xây dựng hai đường đi không giao nhau nối s và t bằng cách sử dụng đường đi ngắn nhất giữa s và t và loại bỏ tất cả các đỉnh articulation trên đường đi này. Vì không có đỉnh articulation nào trên đường đi ngắn nhất giữa s và t, ta có thể loại bỏ tất cả các đỉnh này mà không làm cho đồ thị mất tính liên thông. Do đó, giả thiết ban đầu của chúng ta là sai, và một đồ thị không có điểm articulation là một đồ thị biconnected.